

〈物理量の代数〉とは何か：圏代数による定式化へ

西郷 甲矢人 (長浜バイオ大学)

E-mail: h.saigoh@nagahama-i-bio.ac.jp

以前、本フォーラムにおいて、オフシェル科学の基盤について考えるためには「状態とは何か」といった根本的な問題について再考する必要がある、と述べた（西郷甲矢人『〈状態〉とは何か』、オフシェル科学フォーラム、2020年）。そこでは、系と環境のインターフェイスとしてのあり方である状態を、「物理量の代数」から「複素数」への写像（各物理量にその期待値を対応させる「期待値汎関数」）として捉える考え方について説明した。

次の疑問は、「物理量の代数」をどのように考えるべきか？ということになる。量というものは、足したり掛けたりできるものであり（もちろんそれに物理的な意味があるかどうかは自明ではないが「考えることはできる」）、量の全体が代数をなすことは自然な仮定と考えられる。一方で、それが「物理」量、つまり物理系の何らかの特性を表していなければならないことを考えると、その物理系のダイナミカルな特性との関係を持った代数を考えるべきだろう、ということに気づく。すると、「物理系のダイナミカルな特性」から「代数」が定まるといった筋書きが見えてくる。

では、物理系のダイナミカルな特性というものをどのように捉えるのが適切であろうか。我々はオフシェル科学という新しい領域に乗り出そうというのだから、少なくとも最初は十分に一般的なダイナミクス概念から出発することが望ましい。この十分に一般的な「ダイナミクス」概念として、われわれは「圏」の概念を用いることを提案する。圏とは、「対象」と呼ばれるものたちと、それらの間を媒介する「射」（あるいは矢）と呼ばれるものたちからなるシステムであって、一方の「行き先」と他方の「出どころ」が一致する二つの射は「合成」ができ、合成は結合律を満たし、各対象にはそこから自身への「恒等射」と呼ばれる「何に合成してもその相手を変えない」射が存在するようなものをいう。

物理系のダイナミクスを捉えるということは、それについていろいろ測定を行った時に起きうる「出来事」＝「事象」たち（これが対象）とそれらの間の可能な「推移」（これが射）の全体を捉えることである、と、とりあえずはいうことができるだろう。それらの推移が、どのような「重み」を持つことになるかということにはまさに系と環境とのインターフェイスによって定まるものであろうから、まずはあらゆる「可能な遷移」たちを、いわば「不定元」として「生のまま」考えるのが適切であろう。そういうわけで、われわれは物理系のダイナミカルな特性を圏として捉えるのである。

さて、射を「不定元」として考えると述べたが、ここまでくれば「圏代数」まではあと一步である。不定元から多項式の全体（多項式環）を考えることに馴染んでいる読者も多いであろうが、まさにその一般化としてわれわれは圏から「圏代数」を考えることができるのである。具体的には、「幾つかの射を（適当な係数を掛けつつ）足し合わせたもの」たちを要素とし、そこに圏の「合成」から自然に定まる積をこめて考えると、これは代数となる（対象全体の集まりが有限集合の場合、積の「単位元」も存在する。一般の場合にも、「単位元」を付加して考えることが可能である）。これを圏代数という。圏代数は、関数環・多項式環・群環・隣接代数・行列環といった数学において重要な諸概念を自然に含み込む概念でもあり、それ自体としても大変興味深い。そのような圏代数を、われわれはオフシェル科学の基盤に据えようとするのである。

さらに、圏に「共役」的な構造、つまり「二回行くと元に戻る」演算が定められる場合には、圏代数は*-代数と呼ばれるものになり、「正值性」の概念も定められる。ここまでくれば、圏代数

を〈物理量の代数〉であると考えてもよいだろう。そして以前の記事で（一般の*-代数に関して）述べたような道筋で、圏代数上の状態概念を考えることができ、確率法則を論じたり、GNS 構成を通じてヒルベルト空間の枠組みの中で表現を考えたり、いわゆる「量子力学」で扱われる発展方程式を扱うなど、様々なことが可能になる。とくに、圏の射がすべて可逆の場合、つまり圏が「亜群」である場合が典型的である。なお、この「亜群」に関する圏代数（「亜群代数」）を用いてシュウィンガー流の量子力学の定式化を扱う先行研究も存在しており（例えば F. M. Ciaglia, F. Di Cosmo, A. Ibort, and G. Marmo. *Schwinger's Picture of Quantum Mechanics. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 17(04):2050054 (14), 2020. など）、われわれのアプローチは彼らのものを包含しつつ、不可逆性のある場合やいわゆる「不定計量」の問題までも自然に取り込めるように一般化しようとするものであるともいえる。

また、GNS 構成を通じてももとのダイナミクスを（多くの場合において）ヒルベルト空間の枠組みで表現できることから、「量子ウォーク」についても論じることが可能になる。量子ウォークとドレスト光子のつながりについては、本フォーラムをはじめ様々な場で論じてきたとおりである。このように、圏代数はオフシエル科学の基盤の探求において役立つとともに、その大きな枠組みと具体的なモデリングとを自然につなげる役割をも果たすと考えられる。そして、量子ウォークを関数環・多項式環・群環・隣接代数・行列環といった概念と対等に扱うこと自体が数学として興味深いのはもちろんのこと、物理現象として重要であるにも関わらず「オンシエル科学」からは非本質的・異端的なものとして（そんなことは本当は不可能であるにも関わらず）「排除」されがちな諸現象を適切に位置づけるためにも、圏代数を要として物理理論を定式化していくことが重要であるとわれわれは考えている。